Der Satz von Ceva

Definition: Für $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\phi(\lambda) = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$$

Satz: Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ nicht auf einer Geraden.

(1) Die Abbildung ϕ bildet die Ebene E mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ bijektiv auf $\mathbb{R}^2$ ab.

(2) Dann gibt es zu jeder Geraden $G \in \mathbb{R}^2$ Zahlen $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$, so dass G die Menge aller Punkte $X \in \mathbb{R}^2$ ist, die sich als

$$\begin{aligned} X &= \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C \\ \mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

schreiben lassen.

(3) Diese Menge ist genau dann eine Gerade, wenn μ_1, μ_2, μ_3 nicht alle gleich sind.

Beweis: (1) Übung.

(2) $F = \phi^{-1}(G)$ ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die 0 enthält und die Ebene E schneidet. Es ist

$$F = \{\lambda \in \mathbb{R}^3 : \mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3 = 1\}$$

wobei μ nicht auf E senkrecht steht, weil F nicht parallel zu E ist. Es folgt, dass alle Punkte von G eine Darstellung der verlangten Form haben.

(3) Wenn alle μ_i gleich sind, so ist die Menge leer oder gleich dem $\mathbb{R}^2$. Ansonsten ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} \mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ die ganz in E liegt. Das Bild unter ϕ ist also eine Gerade in $\mathbb{R}^2$.

Satz von Ceva: Seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^2$ nicht auf einer Geraden und $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^2$ mit baryzentrischen Koordinaten

$$X_i = \lambda_{i,1} A_1 + \lambda_{i,2} A_2 + \lambda_{i,3} A_3$$

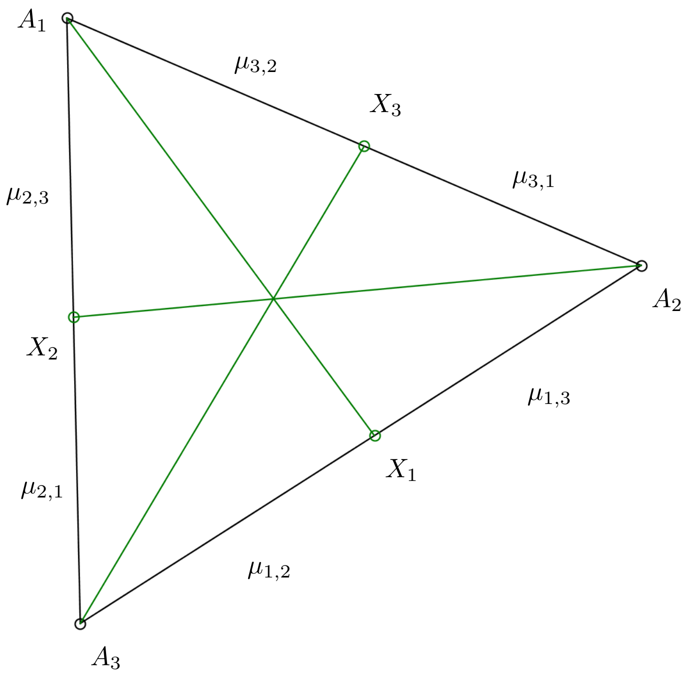
für $i = 1, 2, 3$. Dann schneiden sich die Geraden

$$A_1 X_1, \quad A_2 X_2, \quad A_3 X_3$$

genau dann in einem Punkt oder sie sind parallel zueinander, wenn

$$\lambda_{1,2} \lambda_{2,3} \lambda_{3,1} = \lambda_{1,3} \lambda_{2,1} \lambda_{3,2}$$

ist.



Beweis: Wir stellen die Geraden A_iX_i in der folgenden Form dar. Für A_1X_1 gilt

$$\begin{aligned} X &= \lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_1 + \lambda_3 C_1, \\ \lambda_{1,3}\lambda_2 - \lambda_{1,2}\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1, \end{aligned}$$

weil man leicht nachprüft, dass dann A_1 und X_1 auf der Geraden liegen. Für den Schnittpunkt aller Geraden ergibt sich ein Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_{1,3} & -\lambda_{1,2} \\ \lambda_{2,3} & 0 & -\lambda_{2,1} \\ \lambda_{3,2} & -\lambda_{3,1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix ist

$$\lambda_{1,2}\lambda_{2,3}\lambda_{3,1} - \lambda_{1,3}\lambda_{3,2}\lambda_{2,1}.$$

Wenn die Determinante ungleich 0 ist, so schneiden sich die Geraden also nicht, da dann $\lambda = 0$ die einzige Lösung ist. Wenn die Determinante gleich 0 ist, so sind ist zum Beispiel die dritte Zeile der Matrix von den ersten beiden linear abhängig. Das bedeutet, dass jeder Schnittpunkt von A_1X_1 und A_2X_2 auch auf A_3X_3 liegt. Damit schneiden sich die Geraden in einem Punkt oder sie sind parallel zueinander.

Aufgabe: Warum folgt dann $\mu_{1,2}\mu_{2,3}\mu_{3,1} = \mu_{1,3}\mu_{2,1}\mu_{3,2}$ mit den $\mu_{i,j}$ in obiger Abbildung?